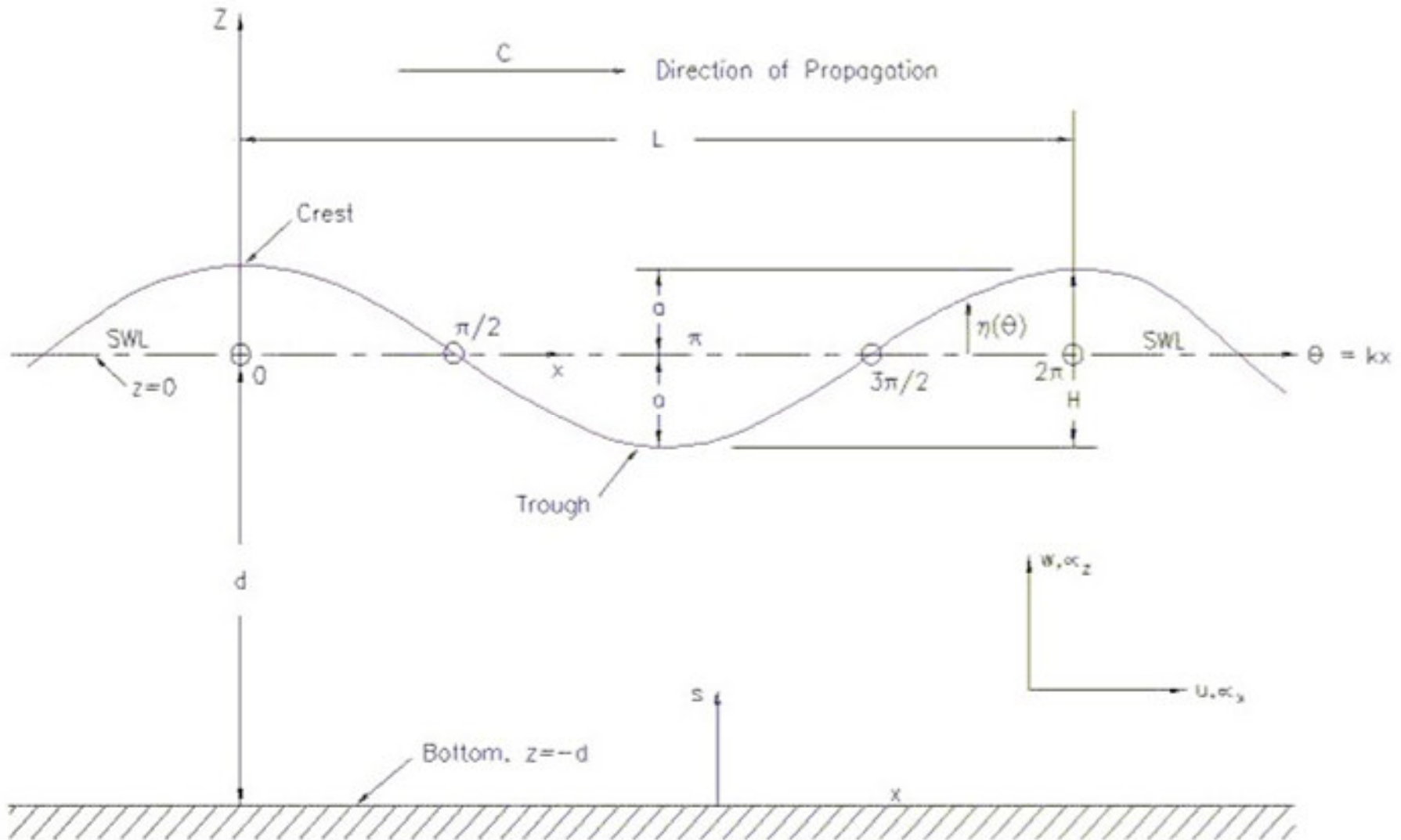


ΟΡΙΣΜΟΙ



ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΘΕΩΡΕΙΑΣ

ΡΕΥΣΤΟ

- Ομογενές
- Ασυμπίεστο ($\rho = \text{σταθερή}$)
- Επιφανειακή τάση αμελητέα.
- Αστρόβιλη Ροή

ΚΥΜΑ

- Μικρό Ύψος ($H \ll L, H \ll d$)
- Μορφή ημιτονοειδής.
- 2-D – Απεριόριστο μήκος κορυφής
- Αμελητέα επίδραση περιστροφής της γης (Coriolis effect)

ΟΡΙΑ

- Πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια σταθερή και ομοιόμορφη.
- Πυθμένας οριζόντιος, σταθερός, αδιαπερατός.

ΑΡΧΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Βασική εξίσωση - Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Οριακές συνθήκες

Πυθμένας (z=-d):

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Επιφάνεια (z=η):

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3)$$

Επιφάνεια: Ατμοσφαιρική Πίεση

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Επίλυση εξισώσεων!

ΕΠΙΛΥΣΗ

Ημιτονοειδής επιφάνεια

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \quad (5)$$

$$k = 2\pi/L \quad \omega = 2\pi/T$$

Μικρό ύψος:

$$u^2, w^2 \quad \text{Αμελητέα}$$

Εξ. (4) στην επιφάνεια,
 $z=\eta$

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6)$$

Εξ. (5) και (6):

$$\phi = f(z) \sin(kx - \omega t) \quad (7)$$

ΕΠΙΛΥΣΗ

Εξ. (7) και (1):
$$-k^2 f(z) + f''(z) = 0 \quad (8)$$

Αρα
$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (9)$$

Εξ. (7) και (9):
$$\phi = (Ae^{kz} + Be^{-kz}) \sin(kx - \omega t) \quad (10)$$

Εξ. (10) στη (2):
$$Ake^{-kd} - Bke^{kd} = 0 \quad Ae^{-kd} = Be^{kd} = D/2 \quad (11)$$

Εξ. (11) στη (10):
$$\phi = \frac{D}{2} [e^{k(z+d)} + e^{-k(z+d)}] \sin(kx - \omega t) \quad (12)$$

$$\phi = D \cosh k(z+d) \sin(kx - \omega t) \quad (13)$$

Εξ. (3) και (6):
$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{Στην επιφάνεια} \quad (14)$$

ΛΥΣΗ

Εξ. (13) στη (14):

$$-Dk \sinh(kd) \sin(kx - \omega t) = -\frac{1}{g} \omega^2 D \cosh(kd) \sin(kx - \omega t) \quad (15)$$

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (16)$$

Εξ. (5) και (13) στη (6):

$$\frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) = -\frac{\omega}{g} D \cosh(kd) \cos(kx - \omega t) \quad (17)$$

$$D = -\frac{g}{2} \frac{H}{\omega} \frac{1}{\cosh(kd)} \quad (18)$$

$$\phi = -\frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(kx - \omega t) \quad (19)$$

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

$$\omega^2 = gk \tanh(kd)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L} \quad (20)$$

Βαθιά νερά:

$$L_o = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (21)$$

Ρηχά νερά:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \frac{2\pi d}{L} \quad \frac{L^2}{T^2} = gd$$

$$c = \sqrt{gd} \quad (22)$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΕΞ. ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

$$\omega^2 = gk \tanh(kd)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L} \quad (20)$$

$$c^2 = gd \frac{1}{y + \frac{1}{1 + 0.6522y + 0.4622y^2 + 0.0864y^4 + 0.0675y^5}}$$

$$y = k_0 d$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΛΥΣΗ

$$\omega^2 = gk \tanh(kd)$$

